DS n°5 : Limites, dérivation, convexité – Corrigé

Noté sur 140 pts ±5 pts pour le soin et la clarté,
puis la note est divisée par 5 pour faire une note sur 20.

Exercice 1 : Moyennes arithmétique, quadratique, harmonique et géométrique **20 pts**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$. On pose

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \qquad Q = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$H = \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \ldots + a_n^{-1}}{n}\right)^{-1} \qquad G = (a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n)^{\frac{1}{n}}$$

On veut montrer que $H \leq G \leq A \leq Q$.

1) Montrer que $\ln G \leq \ln A$. En déduire une des inégalités voulues. **6 pts**

La fonction ln est concave car elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sa dérivée seconde est $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ qui est négative. Ainsi, par l'inégalité de Jensen,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln(a_k) \leq \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\right)\\
\implies &\frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^n a_k\right) \leq \ln A\\
\implies &\ln\left(\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}}\right) \leq \ln A\\
\implies &\ln G \leq \ln A
\end{aligned}$$

et donc $\boxed{G \leq A}$ car exp est croissante.

2) En utilisant la fonction $x \mapsto x^2$, montrer que $A \leq Q$. **6 pts**

La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe car elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sa dérivée seconde est $x \mapsto 2$ qui est positive. Ainsi, par l'inégalité de Jensen,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\right)^2 \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k^2\\
\implies &A^2 \leq Q^2\\
\implies &|A| \leq |Q| \qquad \text{car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+\\
\implies &\boxed{A \leq Q} \qquad \text{car } A \text{ et } Q \text{ sont positifs}
\end{aligned}$$

3) Montrer que $\ln \dfrac{1}{H} \geq \ln \dfrac{1}{G}$. Conclure. **8 pts**

On remarque que

$$\begin{aligned}
\ln\frac{1}{G} &= \ln\left(\frac{1}{(a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n)^{\frac{1}{n}}}\right)\\
&= -\ln\left((a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n)^{\frac{1}{n}}\right)\\
&= -\frac{1}{n}\sum \ln(a_k)\\
&= \frac{1}{n}\sum \ln(a_k^{-1})
\end{aligned}$$

et

$$\ln\frac{1}{H} = \ln\left(\frac{1}{n}\sum a_k^{-1}\right)$$

Or, la fonction ln est concave, donc si on applique l'inégalité de Jensen aux réels $a_1^{-1}, \cdots, a_n^{-1}$ (avec les poids tous égaux à $\dfrac{1}{n}$) on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum \ln(a_k^{-1}) \leq \ln\left(\frac{1}{n}\sum a_k^{-1}\right)\\
\implies &\ln\frac{1}{G} \leq \ln\frac{1}{H}\\
\implies &0 < \frac{1}{G} \leq \frac{1}{H} \qquad \text{(car exp est croissante)}\\
\implies &\boxed{G \geq H} \qquad \text{car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+^*
\end{aligned}$$

Finalement, par les questions précédentes, on a bien $\boxed{H \leq G \leq A \leq Q}$.

Exercice 2 : Calculs de limites (?) **22 pts**

1) On pose $f : x \mapsto (\ln x) \times \ln(\ln x)$. Déterminer D_f. Montrer que f est continue. Peut-on prolonger f par continuité en 1 ? Si c'est le cas, on précisera la valeur du prolongement en 1. **4,5 pts**

D'une part, $\ln x$ a un sens si et seulement si $x > 0$. D'autre part, $\ln(\ln x)$ a un sens si et seulement si $\ln x > 0$ donc si et seulement si $x > 1$. Finalement, $\boxed{D_f =]1, +\infty[}$.

f est continue comme produit et composée de fonctions continues.

Pour admettre un prolongement continu, il suffit que $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ existe et soit fini. On remarque que

$$\ln x \xrightarrow[x \to 1^+]{} 0^+$$

et par ailleurs

$$X \ln X \xrightarrow[X \to 0^+]{} 0 \qquad \text{par croissances comparées}$$

donc par composition,

$$(\ln x) \times \ln(\ln x) \xrightarrow[x \to 1^+]{} 0$$

Ainsi, f est prolongeable par continuité en 1 en posant $\boxed{f(1) := 0}$.

2) On considère la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [-1, 1]$ par $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$. On pose $J =]-1, 0[\cup]0, 1[$.

a) Montrer que f est dérivable sur J et déterminer l'expression de sa dérivée sur J. **4,5 pts**

On pose $g : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ et $h : x \mapsto \sqrt{1 - x}$. Alors $f = h \circ g$. Or, pour tout $x \in J$,

- $1 - x^2 \neq 0$ donc g est dérivable en x
- Comme $x^2 \neq 0$, on a $1 - g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2} \neq 0$. Ainsi, h est dérivable en $g(x)$

Donc f est dérivable en x par composition. De plus,

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(g(x)) \times g'(x) \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{1 - g(x)}} \times \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} \times (-2x) \\ &= \boxed{\frac{1}{2\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}} \times \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}} \end{aligned}$$

b) Est-ce que f est dérivable en 1 ? **6,5 pts**

Soit $x \in J$. On remarque que par opérations sur les limites, $\sqrt{1 - x^2} \xrightarrow[x \to 1^-]{} 0^+$ et donc

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{2\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}} = \frac{1}{2\sqrt{1 - 0}} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = +\infty$$

de sorte que $f'(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} +\infty$. Ainsi, par le théorème de la limite de la dérivée, $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1. On en déduit que $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 1}$.

c) Est-ce que f est dérivable en 0 ? On pourra étudier la dérivabilité à gauche et à droite en 0. **6,5 pts**

Soit $x \in [-1, 1]$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right) \times \left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{1 - (1 - x^2)}{1 + \sqrt{1 - x^2}}} \\ &= \frac{|x|}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} \end{aligned}$$

- Si $x \in]0, 1]$, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ainsi f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

- Si $x \in]-1, 0[$, un calcul similaire donne

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-x}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} \times \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^-]{} -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ainsi f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Puisque $f'_g(0) \neq f'_d(0)$, la fonction $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 0}$.

Exercice 3 : Le principe du maximum **24 pts**

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On considère une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ convexe. On souhaite montrer le résultat suivant, appelé *principe du maximum* :

$(\mathcal{PM})$: si f atteint son maximum en un point de $]a, b[$, alors f est constante sur $[a, b]$.

1) Dans cette question uniquement, on suppose f dérivable. Montrer $(\mathcal{PM})$. On pourra montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, on a $f(x) = f(c)$. **6,5 pts**

Montrons $(\mathcal{PM})$. Par hypothèse, f atteint son maximum en un point de $]a, b[$. Notons c ce point. Alors comme c est un point intérieur de $[a, b]$ et est un maximum local (car global), c'est un point critique : $f'(c) = 0$. De plus, comme f est convexe, on a pour tout $x \in [a, b]$,

$$f(x) \geq f'(c)(x - c) + f(c) = f(c)$$

et par ailleurs, comme f atteint son maximum en c, on a également $f(x) \leq f(c)$. On en déduit que $\boxed{f(x) = f(c)}$. Ainsi f est constante.

2) On souhaite maintenant prouver le principe du maximum dans le cas général.

a) Rappeler l'inégalité des pentes qui fait intervenir les points $x, c, z \in [a, b]$ tels que $x < c < z$. **2,5 pts**

Avec $x < c < z$, on a

$$\boxed{\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq \frac{f(x) - f(z)}{x - z} \leq \frac{f(c) - f(z)}{c - z}}$$

b) En déduire $(\mathcal{PM})$. **8 pts**

Supposons que f atteigne son maximum en un point $c \in]a, b[$. Alors pour tous $x \in [a, c[$ et $z \in]c, b]$, on a par la question précédente

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq \frac{f(c) - f(z)}{c - z}$$

Or, par hypothèse, on a $f(x) - f(c) \leq 0$ et $x - c \leq 0$, tandis que $f(c) - f(z) \geq 0$ et $c - z \leq 0$. Ainsi, on obtient

$$0 \leq \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq \frac{f(c) - f(z)}{c - z} \leq 0$$

Finalement, on a :

- $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = 0$, donc $f(x) - f(c) = 0$, i.e. $f(x) = f(c)$
- $\frac{f(c) - f(z)}{c - z} = 0$, d'où $f(c) = f(z)$

On en déduit que $f(x) = f(c) = f(z)$ et ce pour tous $x \in [a, c[$ et $z \in]c, b]$. Finalement, $\boxed{f \text{ est constante et égale à } f(c) \text{ sur } [a, b]}$.

3) On suppose que f est continue. Montrer que

$$\max_{x \in [a,b]} f(x) = \max(\, f(a),\, f(b)\,)$$

après avoir justifié si nécessaire que les quantités ci-dessus ont un sens. **7 pts**

f est continue sur le segment $[a, b]$ donc par le théorème des bornes atteintes, f atteint son maximum sur $[a, b]$. Ainsi, il existe $d \in [a, b]$ tel que $f(d) = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

- Si $d \in]a, b[$, alors par ce qui précède f est constante sur $[a, b]$ donc en tout point égale à $f(d)$. Ainsi :

$$\max(\, f(a),\, f(b)\,) = f(d) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

- Si $d = a$, on a $f(a) = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x) \geq f(b)$, donc $\max(\, f(a),\, f(b)\,) = f(a)$. Ainsi,

$$\max_{x \in [a,b]} f(x) = f(a) = \max(\, f(a),\, f(b)\,)$$

- Si $d = b$, on montre de même que $f(b) \geq f(a)$ puis l'égalité voulue.

Problème : Rolle généralisé **74 pts**

1) On considère $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{x}{(1+x)^2}$.

a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et calculer f' et f''. **3 pts**

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en tant que fonction rationnelle. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f'(x) = \frac{(1+x)^2 - 2(1+x)x}{(1+x)^4} = \frac{1+x-2x}{(1+x)^3} = \boxed{\frac{1-x}{(1+x)^3}}$$

$$f''(x) = \frac{-(1+x)^3 - 3(1+x)^2(1-x)}{(1+x)^6} = \frac{-1-x-3+3x}{(1+x)^4} = \boxed{\frac{2x-4}{(1+x)^4}}$$

b) Déterminer $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. **10 pts**

(La formule de récurrence n'est pas évidente avec juste f' et f''. On calcule également

$$f'''(x) = \frac{2(1+x)^4 - 4(1+x)^3(2x-4)}{(1+x)^8} = \frac{2(1+x) - 8x + 16}{(1+x)^5} = \frac{-6x+18}{(1+x)^5} = -6\frac{x-3}{(1+x)^5}$$

et en réarrangeant de même $f'(x)$ et $f''(x)$ on voit apparaitre un motif...)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$H_n : \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \frac{x-n}{(1+x)^{n+2}}$$

Montrons H_n par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$(-1)^n n! \frac{x-n}{(1+x)^{n+2}} = \frac{x}{(1+x)^2} = f(x) = f^{(0)}(x)$$

  d'où H_0 est vraie.
- On suppose H_n pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Montrons H_{n+1}. Par hypothèse, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \frac{x-n}{(1+x)^{n+2}}$$

  donc

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= (-1)^n n! \times \frac{(1+x)^{n+2} - (x-n)(n+2)(1+x)^{n+1}}{(1+x)^{2n+4}} \\
&= (-1)^n n! \times \frac{(1+x) - (x-n)(n+2)}{(1+x)^{n+3}} \\
&= (-1)^n n! \times \frac{1+x-(n+2)x+n^2+2n}{(1+x)^{n+3}} \\
&= (-1)^n n! \times \frac{-(n+1)x+(n+1)^2}{(1+x)^{n+3}} \\
&= (-1)^n (n+1)! \times \frac{-x+(n+1)}{(1+x)^{n+3}} \\
&= (-1)^{n+1} (n+1)! \times \frac{x-(n+1)}{(1+x)^{n+3}}
\end{aligned}$$

  D'où H_{n+1} est vraie.
- Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est vraie.

Note : on pouvait également utiliser la formule de Leibniz, mais les calculs étaient plus lourds et la question 1.a) vous incitait plutôt à trouver une formule de récurrence.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ s'annule exactement une fois sur $\mathbb{R}_+$. **3 pts**

Par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\begin{aligned}
&f^{(n)}(x) = 0 \\
\iff &(-1)^n n! \frac{x-n}{(1+x)^{n+2}} = 0 \\
\iff &x - n = 0 \\
\iff &x = n
\end{aligned}$$

Ainsi, $f^{(n)}$ ne s'annule qu'une fois sur $\mathbb{R}_+$.

2) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$ telle que $f(a) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$. On veut montrer que f' s'annule au moins une fois sur $]a, +\infty[$.

On pose $h = f \circ \tan$, définie sur $\left[\arctan a, \frac{\pi}{2}\right[$.

a) Montrer que h est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{2}$. On appellera encore h ce prolongement. Donner la valeur de $h\left(\frac{\pi}{2}\right)$. **3 pts**

$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \tan x = +\infty$ et on a $\lim\limits_{y\to+\infty} f(y) = f(a)$. Ainsi, par composition, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} (f\circ\tan)(x) = f(a)$. Ainsi, $h = f\circ\tan$ est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{2}$ en posant $\boxed{h\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(a)}$.

b) Montrer qu'il existe $c \in \left]\arctan a, \frac{\pi}{2}\right[$ telle que $h'(c) = 0$. **6 pts**

On va appliquer le théorème de Rolle. h est continue sur $\left[\arctan a, \frac{\pi}{2}\right[$ par composée de fonctions continues. Par la question précédente, son prolongement est continu sur $\left[\arctan a, \frac{\pi}{2}\right]$. De plus, comme

- $\tan$ est dérivable sur $\left]\arctan a, \frac{\pi}{2}\right[$,
- et f est dérivable sur l'ensemble $\tan\left(\left]\arctan a, \frac{\pi}{2}\right[\right) =]a, +\infty[$

on en déduit que h est dérivable sur $\left]\arctan a, \frac{\pi}{2}\right[$ par composition. Enfin, par la question a),

$$h(\arctan a) = f(a) = h\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Finalement, par le théorème de Rolle, il existe $c \in \left]\arctan a, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $h'(c) = 0$.

c) En déduire qu'il existe $\alpha \in]a, +\infty[$ tel que $f'(\alpha) = 0$. **5 pts**

Par ce qui précède, on a

$$0 = h'(c) = f'(\tan c) \times (1 + \tan^2 c)$$

et donc $f'(\tan c) = 0$. On pose $\alpha = \tan c$. Comme $\arctan a < c < \frac{\pi}{2}$ et que $\tan$ est strictement croissante sur $\left]\arctan a, \frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit que

$$\tan(\arctan a) < \tan c$$

c'est-à-dire $a < \alpha$. Finalement, il existe $\alpha \in]a, +\infty[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

3) Soit b un réel et $g : [b, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[b, +\infty[$ telle que $g(b) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. On veut montrer que g' et g'' s'annulent au moins une fois sur $]b, +\infty[$.

a) Justifier qu'il existe $\beta \in]b, +\infty[$ tel que $g'(\beta) = 0$. **3 pts**

g vérifie toutes les hypothèses de la question 2, car elle est continue sur $[b, +\infty[$, dérivable sur $]b, +\infty[$ et vérifie $g(b) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. Donc il existe $\beta \in]b, +\infty[$ tel que $g'(\beta) = 0$.

b) Soit $x \geq b$. Montrer qu'il existe $d_x \in]x, x+1[$ tel que $g'(d_x) = g(x+1) - g(x)$. **4 pts**

g est continue et dérivable sur $[x, x+1]$ car elle l'est sur $[b, +\infty[$. Donc par le théorème des accroissements finis, il existe $d_x \in]x, x+1[$ tel que

$$\boxed{g'(d_x) = \frac{g(x+1) - g(x)}{x+1-x} = g(x+1) - g(x)}$$

c) On suppose que g' est monotone au voisinage de $+\infty$.

i) Justifier que g' admet une limite en $+\infty$. **4 pts**

Comme g' est monotone au voisinage de $+\infty$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que g' est monotone sur $[A, +\infty[$. Par le théorème de la limite monotone (pour les fonctions) appliqué à $g'|_{[A,+\infty[}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x)$ existe et a un sens.

ii) Montrer que cette limite est nulle. **6 pts**

On note $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Tout d'abord, comme $x < d_x$, on a également $d_x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc par composition, $g'(d_x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$.
- Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = g(b)$, on a également $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x+1) = g(b)$ (par composition)

Ainsi, en passant à la limite dans

$$g'(d_x) = g(x+1) - g(x)$$

on obtient

$$\boxed{\ell = g(b) - g(b) = 0}$$

iii) En déduire qu'il existe $\gamma \in]b, +\infty[$ tel que $g''(\gamma) = 0$. **5 pts**

Par la question 3)a) et la question précédente, il existe $\beta \in]b, +\infty[$ tel que

$$g'(\beta) = 0 = \lim_{x \to +\infty} g'(x)$$

Alors, en appliquant le résultat de la question 2) à la fonction g', qui est continue et dérivable sur $[\beta, +\infty[$, on en déduit qu'il existe $\gamma \in]\beta, +\infty[$ tel que $(g')'(\gamma) = 0$.

Comme $\beta > b$, on a ainsi qu'il existe $\gamma \in]b, +\infty[$ tel que $g''(\gamma) = 0$.

d) On suppose que g' n'est monotone sur aucun voisinage de $+\infty$.

i) Justifier qu'il existe $x_1, x_2 \in]\beta, +\infty[$ tels que $g''(x_1) < 0 < g''(x_2)$. **6 pts**

Supposons par l'absurde que $g'' \geq 0$ sur $]\beta, +\infty[$. Alors g' est croissante sur cet intervalle, ce qui contredit l'hypothèse que g' n'est monotone sur aucun voisinage de $+\infty$. Ainsi, g'' n'est pas positive sur $]\beta, +\infty[$. D'où il existe $x_1 \in]\beta, +\infty[$ tel que $g''(x_1) < 0$.

De même, on peut montrer que g'' n'est pas négative sur $]\beta, +\infty[$. Donc il existe $x_2 \in]\beta, +\infty[$ tel que $g''(x_2) > 0$.

ii) En déduire qu'il existe $\gamma \in]b, +\infty[$ tel que $g''(\gamma) = 0$. **5 pts**

Par la question précédente, on a $0 \in [g''(x_1), g''(x_2)]$. Comme g est de classe $\mathcal{C}^2$, g'' est continue sur $[b, +\infty[$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe γ compris entre x_1 et x_2 tel que $g''(\gamma) = 0$. Enfin, comme $x_1, x_2 \in]\beta, +\infty[$, on a également $\gamma \in]\beta, +\infty[$, donc $\gamma \in]b, +\infty[$ (car $\beta > b$).

e) Conclure. **3 pts**

Par les questions précédentes, on a dans tous les cas qu'il existe β, γ dans $]b, +\infty[$ tels que $g'(\beta) = g''(\gamma) = 0$, ce qui correspond bien à ce que l'on voulait démontrer.

Note : ce résultat peut se généraliser avec l'énoncé suivant. Soit $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ telle que $f(a) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$. Alors on peut montrer que $f', f'', \cdots, f^{(n)}$ s'annulent au moins une fois sur $]a, +\infty[$. On l'a vérifié dans un cas particulier avec la question **1)**.

4) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ telle que $f(a) = f(b)$, est-ce que nécessairement les fonctions $f', f'', \cdots, f^{(n)}$ s'annulent au moins une fois sur $]a, b[$? **4 pts**

La propriété est fausse. Contre-exemple : avec $a = -1$, $b = 1$, $n = 2$ et la fonction $f : x \mapsto x^2$. On a alors $f(-1) = f(1)$ mais sa dérivée seconde

$$f'' : x \mapsto 2$$

ne s'annule en aucun point de $] -1, 1[$.